Výroková logika

Výrokové formule

Již máme jednoduché výroky, výrokové spojky, díky nim i složené výroky, umíme výroky negovat a nyní se naučíme další věc a to budou výrokové formule. **Výrokové formule** jsou *„výroky, které jsou složeny z několika (konečného počtu) jednoduchých výroků, výrokových spojek a výrokových závorek"*. Můžeme si tedy pod tím představit vše co jsme se doposud naučili složené dohromady.

Při řešení pravdivosti výrokových formulí využíváme tabulku, do které zapíšeme do jednotlivých sloupců všechny jednoduché výroky, všechny výrokové spojky, všechny negace a nakonec výslednou výrokovou formuli.

Poznámka: do tabulky pravdivostních hodnot budeme do posledního sloupce místo opisování celé formule vpisovat „VF" jako zkratku pro výslednou formuli. Zamezíme tím zbytečně velkému roztáhnutí tabulky.

Pokud tedy budeme řešit například formuli $(p \vee q) \wedge (\neg q \Rightarrow r)$ tak jak vidíme, máme tři různé jednoduché výroky, takže bude $2^3 = 8$ řádků (9 - plus jeden se zadáním), poté máme negaci jednoho výroku a tři výrokové spojky, takže budeme mít sedm řádků. Připravíme si tedy tabulku a zapíšeme si do ní jednoduché výroky i s negací:

p	q	r	$\neg q$			
1	1	1	0			
1	1	0	0			
1	0	1	1			
1	0	0	1			
0	1	1	0			
0	1	0	0			
0	0	1	1			
0	0	0	1			

Nyní přidáme dvě výrokové spojky které jsou uvnitř formule (tedy ty nejhlubší) a vyřešíme je, tedy:

p	q	r	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg q \Rightarrow r$	
1	1	1	0	1	1	
1	1	0	0	1	1	
1	0	1	1	1	1	
1	0	0	1	1	0	
0	1	1	0	1	1	
0	1	0	0	1	1	
0	0	1	1	0	1	
0	0	0	1	0	0	

čímž jsme si připravili tabulku pro řešení naší výsledné výrokové formu. Výslednou formuli řešíme jako tu prostřední výrokovou spojku, která spojuje dvě největší části na levé a pravé straně, které už obě máme vyřešené. Jako výsledek v posledním sloupci tedy obdržíme pravdivost celé výsledné výrokové formule:

p	q	r	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg q \Rightarrow r$	VF
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0

Úplně stejný postup bychom volili v případě delších formulí. Postup by byl stále stejný, jen by přibyl počet sloupců a změnil by se například počet řádků. Ale podstata řešení je stále stejná.

Máme ještě dva speciální druhy výrokových formulí které rozlišujeme. Prvním druhem je **kontradikce**, což je případ, kdy nám v poslední sloupci (tedy jako pravdivost výsledné formule) vyjdou samé nuly. Je to tedy formule, která je nepravdivá za všech různých kombinací jednoduchých výroků ze kterých se skládá. Nejznámějším takovým případem je:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

Druhým druhem je **tautologie**, což je naopak případ, kdy nám vyjde celá výroková formule pravdivá. Je tedy pravdivá za všech možných kombinací jednoduchých výroků ze kterých se skládá. Takovým formulím se někdy říká *zákony výrokové logiky*, jelikož jsou doopravdy pravdivé za všech okolností. Neznámějším příkladem je:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1