Diferenciální počet (derivace)

Důkazy použitých vzorců

Vzorce:

1. $(c \cdot f(x))'_{x=x_0} = c \cdot f'(x_0)$
2. $(f(x) \pm g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
3. $(f(x) \cdot g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. je li $g(x_0) \neq 0$ platí $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
5. $(f \circ g)'(x_0) = (f\left(g\left(x_0\right)\right))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$
6. $f : x = f(y)$ spojitá a ryze monotónní na intervalu I, y_0 vnitřní bod intervalu I, jestliže existuje derivace $f'(y_0)$, pak $f^{-1} : y = f^{-1}(x)$, má v bode $x_0 = f(y_0)$ derivaci:

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{f'(y_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} & \text{je li } f'(y_0) \neq 0 \\ +\infty & \text{je li } f'(y_0) = 0 \text{ a } f \text{ je na } I \text{ rostoucí} \\ -\infty & \text{je li } f'(y_0) = 0 \text{ a } f \text{ je na } I \text{ klesající} \end{cases}$$

Důkaz:

1. Přímo z definice derivace funkce a užitím pravidla pro počítaní s limitami dostáváme:

$$\begin{aligned} (c \cdot f(x))'_{x=x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{c \cdot (f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} c \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0) \end{aligned}$$

2. Podobně pro součet funkcí (rozíl se dokáže analogicky):

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))'_{x=x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

3. Zde taky využijeme, že z existence vlastní derivace v bodě x_0 plyne spojitost v tomhle bodě (konkrétně v poslední a předposlední rovnosti):

$$
\begin{aligned}
(f(x)\cdot g(x))'_{x=x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \\
&= f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)
\end{aligned}
$$

4. Vzhledem k tomu, že funkce g má v bodě x_0 vlastní derivaci, je v tomhle bodě spojitá a tedy existuje okolí bodu x_0 takové, že hodnota funkce g je v libovolném bodě tohoto okolí nenulová, proto:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)} = \\
&= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}\cdot\frac{1}{g(x)g(x_0)}\right) = \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} = \\
&= \frac{1}{g^2(x_0)}\cdot\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x_0)-\lim_{x\to x_0}f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = \\
&= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}
$$

5. K důkazu zvyšných dvou vzorců využijeme tzv. **Carathéodoryho lemma**:
Funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci právě tehdy, když existuje nějaké okolí bodu x_0 a na něm definovaná funkce g, která je v tomto bodě spojitá a taková, že pro každé x z tohoto okolí platí: $f(x)-f(x_0)=g(x)(x-x_0)$ a jestliže taková funkce existuje, pak taky platí: $f'(x_0)=g(x_0)$.
Důkaz:
$\Rightarrow$: Jestliže má f vlastní derivaci v bodě x_0 je v tomhle bodě spojitá a tedy existuje nějaké okolí $O(x_0)$ bodu x_0 na kterém je definovaná. Proto můžeme definovat funkci g takhle:

$$
g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \text{ je-li } x\in O(x_0)\setminus\{x_0\}\\ f'(x_0), \text{ je-li } x=x_0\end{cases}
$$

Takhle definovaná funkce má zřejmě požadované vlastnosti a stačí už jen ověřit spojitost v bodě x_0:

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=g(x_0)$$

a tedy g je spojitá v bodě x_0.
$\Leftarrow$: Jestliže taková funkce existuje, stačí si ji vyjádřit a vypočítat její limitu v bodě x_0. Ta je rovna $f'(x_0)$ ale jelikož je g spojitá v x_0 je taky rovna $g(x_0)$, a proto má f v bodě x_0 vlastní derivaci.
Věta: Nechť funkce $u = g(x)$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a nechť funkce $y = f(u)$ má vlastní derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak složená funkce $y = f(g(x))$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí:

$$(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Důkaz: Z existence vlastní derivace funkce f v bodě u_0 plyne existence funkce φ definované na nějakém okolí $O(u_0)$ a spojité v u_0, splňující:

$$f(u) - f(u_0) = \varphi(u)(u - u_0), \text{ pro } u \in O(u_0)$$

Z existence vlastní derivace funkce g v bodě x_0 plyne existence funkce ψ definované na nějakém okolí $O(x_0)$ a spojité v x_0, splňující:

$$g(x) - g(x_0) = \psi(x)(x - x_0), \text{ pro } x \in O(x_0)$$

Ze spojitosti funkce g v bodě x_0 plyne existence okolí $O_1(x_0)$ bodu x_0 takového, že pro všechna $x \in O_1(x_0)$ plyne $g(x) \in O(u_0)$. Položme $O^*(x_0) = O(x_0) \cap O_1(x_0)$. Pro $x \in O^*(x_0)$ platí:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) = \\ = \varphi(g(x))(g(x) - g(x_0)) = \varphi(g(x))\psi(x)(x - x_0)\end{aligned}$$

Položme $\xi = \varphi(g(x))\psi(x)$. Funkce ξ je definovaná na $O^*(x_0)$ a na tomhle okolí platí: $(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = \xi(x)(x - x_0)$. Funkce ψ je spojitá v bodě x_0, funkce g je spojitá v bodě x_0 a funkce φ je spojitá v bodě $u_0 = g(x_0)$, a proto je ξ taky spojitá v bodě x_0. Podle Carathéodoryho lemmatu tedy existuje $(f \circ g)'(x_0)$ a platí: $(f \circ g)'(x_0) = \xi(x_0) = \varphi(g(x_0))\psi(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

6. Podle Carathéodoryho lemmatu existuje funkce φ definovaná na nějakém okolí $O(y_0)$ bodu y_0, spojitá v tomhle bodě a pro body z tohoto okolí splňující: $f(y) - f(y_0) = \varphi(y)(y - y_0)$. Položme $O^*(y_0) = O(y_0) \cap I$. Na intervalu $O^*(y_0)$ je funkce f spojitá a ryze monotónní, proto k ní existuje inverzní funkce definovaná na $f(O^*(y_0))$, která je taky spojitá a ryze monotónní a jelikož je $x_0 = f(y_0)$ vnitřní bod tohoto intervalu, existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro body z tohoto intervalu platí $f^{-1}(x) \in O^*(y_0)$. Jelikož pro $y \in O^*(y_0)$ platí:

$$f(y) - f(y_0) = \varphi(y)(y - y_0) \tag{1}$$

pro $x \in O(x_0)$ můžeme psát:

$$x - x_0 = \varphi(f^{-1}(x))(f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0))$$

Protože je f ryze monotónní, z rovnice (**??**) plyne $\varphi(y) \neq 0$ pro $y \neq y_0$, tedy $\varphi(f^{-1}(x)) \neq 0$ pro $x \in O(x_0) \setminus \{x_0\}$, takže můžeme psát:

$$f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(x))}(x - x_0)$$

Uvažme nyní případ, že $f'(y_0) \neq 0$. Označme $\xi = 1/\varphi(f^{-1}(x))$ pro $x \neq x_0$ a $\xi(x_0) = 1/f'(y_0)$. Pak je funkce ξ spojitá v bodě x_0, splňuje podmínky Carathéodoryho lemmatu, a proto má funkce f^{-1} derivaci v bodě x_0 a platí:

$$(f^{-1})'(x_0) = \xi(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Nechť nyní platí $f'(y_0) = 0$ a například f je klesajicí (opačný případ se provede analogicky). Pak pro $x \neq x_0$ je zřejmě $\varphi(f^{-1}(x)) < 0$ a taky:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f^{-1}(x)) = \varphi(y_0) = f'(y_0) = 0$$

a proto:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\varphi(f^{-1}(x))} = -\infty$$