Funkce

Skládání funkcí

Stejně jako jsme mohli skládat množinové zobrazení, tak můžeme skládat i funkce (jelikož jak jsme si výše uvedli jde také o zobrazení). Pokud máme nějaké dvě funkce f a g a platí $H(g) \cap D(f) \neq \emptyset$ (k této podmínce se vrátíme později), tak je můžeme složit dohromady a obdržíme **složenou funkci**, kterou značíme $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Mějme tedy konkrétně například funkci $f(x) = \sin(x) - 1$ a $g(x) = \sqrt{x+1}$, pak obdržíme složením:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \sin(\sqrt{x+1}) - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin(x) - 1) = \sqrt{\sin(x) - 1 + 1} = \sqrt{\sin(x)}$$

Z předchozího konkrétního příkladu vyplývá, že skládání funkcí obecně není *komutativní operace*, tedy platí:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Jako při zobrazení tak i u skládání funkcí nazýváme v zápisu $(f \circ g)$ funkci g jako **vnitřní složku** a funkci f jako **vnější složku**.

Ovšem mnohem zajímavější je pro nás situace, kdy zkoumáme definiční obor složené funkce $(f \circ g)$. Z definice skládání zobrazení vyplývá, že vnitřní funkce přijme nějaký vstup z $D(g)$ a vrátí nějaký výstup z $H(g)$, ovšem tento výstup se stává vstupem pro vnější funkci, takže musí být nutně prvkem $D(f)$ a po jeho vložení nám vnější funkce f vrátí onen výstup z $H(f)$. Pro výslednou složenou funkci h pak musí platit:

$$D(h) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\}$$

tedy že definičním oborem složené funkce jsou prvky definičního boru vnitřní funkce takové, že jejich obrazy patří do definičního oboru funkce vnější. Odtud také plyne podmínka z úvodu, že $H(g) \cap D(f) \neq \emptyset$. Kdyby tomu totiž tak bylo a průnik by byl roven prázdné množině, pak by složená funkce neměla žádný definiční obor.

Nyní si všechno rozebereme na konkrétních příkladech.

Příklady

Určete předpis a definiční obor výsledné složené funkce $f : y = f \circ g$, pokud mají jednotlivé funkce předpis:

(a) $f(x) = x^2 + 1$
$g(x) = \sqrt{x-2}$

(b) $f(x) = \sin(x) - 1$
$g(x) = \sqrt{x+1}$

Řešení:
(a) nejprve určíme $f \circ g$ následovně:
$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}) = \left(\sqrt{x-2}\right)^2 + 1 = x - 2 + 1 = x - 1$
Přepis tedy máme, nyní se musíme zamyslet nad definičním oborem. $D(g) = \langle 2; +\infty)$, $H(g) = \langle 0; +\infty)$ a $D(f) = R$.

Podle definice je $D(h) = \langle 2; +\infty)$ jelikož obrazy funkce g hodnot z tohoto intervalu náleží do definičního oboru vnější funkce f. Na první pohled by se sice podle předpisu funkce mohli zdát že je $D(h) = R$ (nemáme omezení pro x), ovšem my musíme respektovat postup, jakým byla funkce h složena.

(b) jak víme z úvodu tak předpisem je:
$y = (f \circ g)(x) = \sin(\sqrt{x+1}) - 1$
Víme že $D(g) = \langle -1; +\infty)$, $H(g) = \langle 0; +\infty)$ a $D(f) = R$.
Proto budou definičním oborem prvky $D(h) = \langle -1; +\infty)$, obdobně jako v předchozím příkladě.