Základní důkazové techniky

Protipříklad

- Protipříklad využíváme, abychom vyvrátili tvrzení. Tím že nalezneme protipříklad, tak ukážeme, že nějaké objekty splní předpoklady ale nesplní závěr a tedy dané tvrzení nemůže být pravdivé.
- Tvrzení z videa:

  Věta. *Jestliže* $x, y \in \mathbb{N}$, *pak* $2x + y < 5$.

Přímý důkaz

- Při dokazování tvrzení $A \Rightarrow B$ tímto způsobem vždy předpokládáme vše v A a snažíme odvodit B. To znamená, že kromě všech našich znalostí které máme, můžeme ještě předpokládat výroky A a využívat je při našem důkazu.
- Tvrzení z videa:

  Věta. *Jestliže* $x, y \in \mathbb{N}$, *pak* $2x + y > 2$.

  Věta. *Jestliže* $x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0$. *Jestliže* $x > y$, *pak* $x^2 > y^2$.

Nepřímý důkaz

- Při dokazování tvrzení $A \Rightarrow B$ tímto způsobem využíváme obměněnou implikaci, tedy implikaci tvaru $\neg B \Rightarrow \neg A$. Tedy v tomto případě předpokládáme $\neg B$ a z toho se snažíme odvodit $\neg A$. To znamená, že kromě všech našich znalostí které máme, můžeme ještě předpokládat výroky $\neg B$ a využívat je při našem důkazu.
- Tvrzení z videa:

  Věta. *Nechť* x *je celé číslo. Jestliže je* x^2 *sudé, tak je* x *sudé.*

  Věta. *Jestliže* $x, y, z \in \mathbb{R}, x > y$. *Jestliže* $zx \leq zy$, *pak* $z \leq 0$.

Důkaz sporem

- Důkaz sporem implikace $A \Rightarrow B$ funguje na tom principu, že předpokládáme, že závěr neplatí a snažíme se dojít k sporu (něčemu co jistě není pravda).
- Výhodou této metody je, že získáme další nástroj, ale ztratíme cíl (ten se změnil na spor).
- Tvrzení z videa:

  Věta. *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$. *Jestliže* $a < b$, *potom* $\frac{a+b}{2} < b$.

  Věta. *Nechť* $x \in \mathbb{R}, x \neq 4$. *Jestliže* $\frac{2x-5}{x-4} = 3$ *potom* $x = 7$.

Video 2 (Důkaz sporem tvrzení které není v implikaci)

- Metodu sporem můžeme využít při dokazování tvrzení tvaru $\neg A$. Budeme předpokládat že platí opak ($\neg\neg A = A$) a dojdeme k nějakému sporu buď s nástroji a nebo s něčím co známe.
- Tvrzení z videa:

Věta. *Dokažte, že* $\sqrt{2}$ *je iracionální číslo.*

což je to stejné jako

Věta. *Dokažte, že* $\sqrt{2}$ *není racionální číslo.*

Důkaz matematickou indukcí

- Pokud dokazujeme tvrzení s přirozenými čísly, tedy že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nějaké tvrzení $P(n)$, tak využíváme **matematickou indukci** která probíhá takto:
  1) dokážeme tvrzení pro konkrétní nejmenší možné n
  2) Poté předpokládáme, že tvrzení platí pro nějaké $n = k$ přirozené a dokážeme, že platí pro $n = k + 1$
- Pří důkazu tvrzení pro $n = k + 1$ musíme využít onen předpoklad pro $n = k$. Tomuto se říká **indukční krok**
- Tvrzení z videa:

  Věta. *Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí, že* $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

  Věta. *Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí, že* $n^2 + n$ *je dělitelné dvěma.*

Geometrické důkazy

- Tvrzení z videa:

  Věta. *Mějme rovinný trojúhelník ABC s úhly* α, β, γ. *Dokažte, že* $\alpha, \beta, \gamma = 180°$.

Důkaz rozdělený na případy

- Pokud chceme a věříme že nám to pomůže, můžeme si důkaz rozdělit na více případů. Všechny případy ovšem musí dohromady dát původní zadání.
- Tvrzení z videa:

  Věta. *Nechť* $x \in \mathbb{Z}$. *Potom* $x^2 = 3k$ *nebo* $x^2 = 3k + 1$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{Z}$.

Pokročilé důkazové techniky

Důkaz tvrzení s obecným kvantifikátorem

- Pokud chceme dokázat tvrzení typu $\forall x : P(x)$, musíme $P(x)$ ukázat nehledě toho jaká hodnota x byla. Tedy musíme na začátku důkazu zdůraznit, že x je libovolné. Poté provedeme důkaz $P(x)$ a nakonec řekneme, že jelikož x bylo libovolné, tak to platí pro všechny.
- Tvrzení z videa:

  Věta. *Nechť* A, B *jsou množiny. Jestliže* $A \cup B = A$, *pak* $A \subseteq B$.

Implikace v nástroji (jako předpoklad)

- Pokud máme jako nástroj implikaci $A \Rightarrow B$, tak pokud může tvrdit že A je pravdivé, tak automaticky víme že i B je pravdivé. Pokud však nemůžeme tvrdit, že A je pravdivé ale můžeme tvrdit, že $\neg B$ je pravdivé, tak (z ekvivalentní) obměněné implikace plyne, že je pravdivé i $\neg A$.

- Tvrzení z videa:

  Věta. *Nechť* $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ *je pravdivý. Potom* $\neg C \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$.

Důkaz tvrzení s existenčním kvantifikátorem

- Když dokazujeme věty s existenčním kvantifikátorem, tak už nemusíme dokazovat něco pro všechna x, ale stačí najít alespoň jedno x které naší podmínku splňuje.
- Potom důkazy většinou začínají jako "Nechť x má hodnotu ..."a ukážeme že tato hodnota splňuje to co má ve tvrzení.
- Abychom našli takovou hodnotu, můžeme klidně hádat, zkoušet, nebo například řešit rovnici a snažit se z ní vyjádřit danou hodnotu.
- Tvrzení z videa:

  Věta. *Dokažte, že* $\forall x > 0\ \exists y : y(y+1) = x$.

Důkaz ekvivalence a konjunkce

- Když dokazujeme konjunkci, tedy výrok tvaru $A \wedge B$ tak dokazujeme jednoduše každý z výroků zvlášť.
- Když chceme dokázat tvrzení $A \Leftrightarrow B$ tak musíme dokázat obě implikace $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.
- Tvrzení z videa:

  Věta. *Nechť* $n \in \mathbb{N}$. *Dokažte že* $6|n \Leftrightarrow (2|n \wedge 3|n)$.

Důkaz existence právě jednoho prvku

- Pokud chceme dokázat, že existuje právě jeden prvek splňující nějakou vlastnost $P(x)$, tedy naším cílem je $\exists! x : P(x)$ tak musíme dokázat dvě věci:
  1) existenci: $\exists x : P(x)$
  2) unikátnost: $\forall y \forall z\ (P(y) \wedge P(z) \Rightarrow y = z)$
- Musíme tedy dokázat, že daný prvek existuje a že je to jediný takový prvek s danou vlastností.
- Tvrzení z videa:

  Věta. *Dokažte pro každé reálné číslo* $x \neq 2$ *existuje právě jedno číslo* y *takové, že* $\frac{2y}{y+1} = x$

Další příklady které byly řešeny

- Dokažte:

  Věta. *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$. *Potom* $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

  Věta. *Nechť* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Jestliže* a *je sudé a* b *je liché, pak* $a^3 - b = 2a + b^2$.

  Věta. *Nechť* A, B, C *jsou množiny,* $A \backslash B \subseteq C$ *a* x *libovolné. Jestliže* $x \in A \backslash C$, *potom* $x \in B$.