Rovnice

Pravidla hry aneb ekvivalentní úpravy

1. **Vyměnění stran rovnice.**
   Pokud máme rovnici $x+1=2$ nebo $2=x+1$, tak se jedná o stejné rovnice. Můžeme tedy měnit strany rovnice - pravou stranu přesunout na levou a naopak.

---

2. **Nahrazení výrazu jiným výrazem, který se mu rovná.**
   Toto pravidlo nám jednoduše říká, že můžeme sčítat a odčítat čísla nebo výrazy. Například:
   $x-(2x+2)=3$
   $x-2x-2=3$
   $-x-2=3$
   Kde jsme si mohli všimnout, že jsme nahradili výraz $-(2x+2)$ výrazem $-2x-2$ a výraz $x-2x-2$ jsme nahradili výrazem $-x-2$. Vidíme tedy že nahrazujeme výrazy jinými, ale vždy tak že se sobě jednotlivé výrazy rovnají.

---

3. **Přičíst k oběma stranám rovnice číslo nebo výraz, který nezmění definiční obor řešení rovnice.**
   K oběma stranám rovnice můžeme přičíst libovolné číslo, například:
   $x-1=3 \quad /+1$
   $(x-1)+1=(3)+1$
   $x=4$
   Co se týče výrazu, musíme si dát pozor na to, aby přičítaný výraz neměnil definiční obor řešení rovnice. Zde je rozdíl:

   Povoleno:

   $-x+1=2 \quad /+x$
   $(-x+1)+x=2+x$
   $1=2+x \quad /-2$
   $(1)-2=(2+x)-2$
   $-1=x$
   Vidíme že definiční obor se nezměnil.

   Nepovoleno:

   $x+2=2 \quad /+\frac{1}{x}$
   $(x+2)+\frac{1}{x}=(2)+\frac{1}{x}$
   $x+2+\frac{1}{x}=2+\frac{1}{x}$
   Vidíme že jsme změnili definiční obor z $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

---

4. **Vynásobit obě strany rovnice nenulovým číslem nebo výrazem.**
   Musíme vždy zajistit, že násobíme buď nenulovým číslem, nebo výrazem, který není nulový v daném definičním oboru řešení rovnice. Kdybychom totiž násobili libovolnou rovnici nulou, tak z ní vždy uděláme rovnici, jejíž řešením jsou všechna reálná čísla. Například:

Povoleno:

$$\frac{1}{x-2} + 2 = x \quad /(x-2)$$

V tomhle případe násobit můžeme, jelikož obor řešení rovnice je $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ a jediný způsob jak vynulovat výrazem kterým násobíme je za x dosadit právě číslo 2, které je vyloučeno z oboru řešení rovnice, takže je vše v pořádku.

Nepovoleno:

$$\frac{1}{x-1} + 2 = x \quad /(x^2-1)$$

Zde to v pořádku není. Víme, že oborem řešení rovnice jsou $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ takže číslo 1 je vyloučené z úvah, což je v pořádku. Ovšem výraz, kterým násobíme, je nulový i v případě, kdy $x = -1$, což je hodnota která není vyloučená z oboru řešení rovnice. Tato úprava je tedy neplatná.

Uvědomte si, že pokud bychom nezaručili že je daný výraz nenulové, jednalo by se o operaci důsledkovou.

---

5. **Umocnit obě strany rovnice, pokud jsou obě strany nezáporné.**
Pokud umocňujeme obě strany rovnice, musíme zajisti, že jsou obě strany nezáporné. Pokud by tomu tak nebylo, mohlo by se stát následující:

Povoleno:

$$\begin{aligned} x &= 2 \quad /^2 \\ x^2 &= 4 \quad /\sqrt{} \\ |x| &= 2 \\ -2 &< 0 \\ \cancel{x_1} &\cancel{= -2} \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Zde jsme si uvědomili, že definičním oborem řešení rovnice je interval $\langle 0; +\infty)$ a jelikož číslo -2 není v tomto intervalu, tak jsme řešení x_1 vyřadili.

Nepovoleno:

$$\begin{aligned} x &= 2 \quad /^2 \\ x^2 &= 4 \quad /\sqrt{} \\ |x| &= 2 \\ x_1 &= -2 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Zde jsme obor řešení nezajišťovali - tedy neurčili jsme obor řešení tak, aby obě strany byly nezáporné a tím pádem jsme dostali jedno řešení navíc které ani řešením není.

Předchozí rovnice byly pouze ukázkové. Umocňování budeme využívat u iracionálních rovnic a proto si ho podrobněji rozebereme v této sekci. Uvědomte si, že pokud nezajistíme nezápornost obou stran, jedná se o úpravu důsledkovou.

---

6. **Zlogaritmovat obě strany rovnice, pokud jsou obě strany kladné.**
Pokud chceme zlogaritmovat obě strany rovnice, musíme zaručit že jsou kladné. Více o této úpravě u exponenciálních a logaritmických rovnic.

---

7. **Odmocnit obě strany rovnice, pokud jsou obě strany nezáporné.**
Pokud chceme odmocňovat, musíme zajistit, aby obě strany rovnice byly nezáporné (druhá odmocnina ze záporného čísla není definována).