Goniometrie a trigonometrie

Vzorce pro goniometrické funkce

Nyní si řekneme něco o velmi důležitých vlastnostech a odvodíme si také některé velmi důležité vzorce pro výpočty s goniometrickými funkcemi.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{1}$$
$$\operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x) = 1 \tag{2}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{3}$$
$$\cos(x) = \cos(-x) \tag{4}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \tag{5}$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \tag{6}$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \tag{7}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \tag{8}$$

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \tag{9}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \tag{10}$$

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{11}$$
$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{12}$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{13}$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{14}$$
$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{15}$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{16}$$

$$\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} \tag{17}$$
$$\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \tag{18}$$

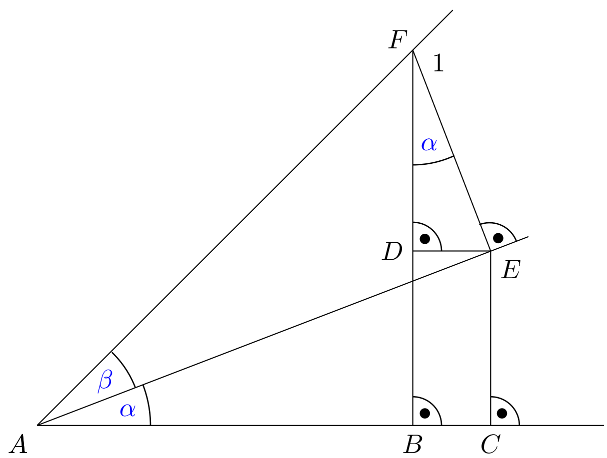
Poznámka: Všechny vzorce se také dají odvodit pomocí Eulerovy formule, my však půjdeme názornější a méně složitější formou důkazů.

V první řadě si odvodíme z obrázku následující funkce součtu úhlů, ze kterých nám poté bude vyplývat pár dalších později uvedených vzorců:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \tag{19}$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \tag{20}$$

Důkaz. (19)
Důkaz bude o trochu delší, ovšem i přesto ho zvládneme, jelikož nepůjde o těžké úvahy. Vše se bude opírat o následující obrázek (bez újmy na obecnosti můžeme zvolit délku $AF = 1$):



V obrázku máme na sobě spojené dva úhly α a β, jejichž goniometrický součet se teď pokusíme odvodit. V obrázku máme zobrazený ještě jednou úhel α a to vpravo nahoře. Jeho umístění vyplývá z toho, že $\measuredangle AED = \alpha$, proto $\measuredangle DEF = 90° - \alpha$, proto nutně $\measuredangle EFD = \alpha$. Nyní si provedeme několik úvah (je nutné znát spojitost mezi goniometrickými funkcemi a pravoúhlým trojúhelníkem):
víme že $AF = 1$. Potom jistě platí:
$\sin(\beta) = EF$
$\cos(\beta) = AE$
$\cos(\alpha) = \dfrac{FD}{\sin(\beta)} \Rightarrow FD = \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha) = \dfrac{EC}{\cos(\beta)} \Rightarrow EC = \sin(\alpha)\cos(\beta)$
$CE = BD$
Nyní už můžeme jistě říci, že:
$\sin(\alpha+\beta) = BD + FD = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

□

Důkaz. (20)
Nyní můžeme pokračovat pro cosinus:
$\cos(\alpha) = \dfrac{FD}{FE} \Rightarrow FE = \dfrac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)} = \sin(\beta)$
$\sin(\alpha) = \dfrac{DE}{EF} \Rightarrow DE = \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha) = \dfrac{AC}{AE} \Rightarrow AC = \cos(\alpha)\cos(\beta)$

$DE = BC$
$\cos(\alpha+\beta) = AC - BC = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ □

Obě předchozí rovnice můžeme modifikovat pro rozdíl úhlů:

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \tag{21}$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \tag{22}$$

Důkaz. (21)
Platí že:
$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin(\alpha)\cos(-\beta) + \cos(\alpha)\sin(-\beta)$
Kde s využitím vzorců (3.1) a (3.2) obdržíme:
$\sin(\alpha)\cos(-\beta) + \cos(\alpha)\sin(-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$ □

Důkaz. (22)
Platí, že:
$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(\alpha)\sin(-\beta)$
Kde s využitím vzorců (3.1) a (3.2) obdržíme:
$\cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ □

Nyní si popišme vlastnost obou funkcí:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{23}$$

$$\cos(x) = \cos(-x) \tag{24}$$

Důkaz. (23)
Vyplývá přímo z vlastnosti funkce, že je lichá. □

Důkaz. (24)
Vyplývá přímo z vlastnosti funkce, že je sudá. □

Nyní dvě důležité identity:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{25}$$

$$\mathrm{tg}(x).\mathrm{cotg}(x) = 1 \tag{26}$$

Důkaz. (25)
Varianta A - Vyplývá přímo z definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku a Pythagorovy věty - viz video "Základní goniometrické vzorce"v tématu "Goniometrie a trigonometrie".
Varianta B - Vycházíme z toho že $\cos(0) = \cos(x+(-x))$
$\cos(x+(-x)) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x)$
$\cos(0) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$
$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ □

Důkaz. (26)
Platí, že:
$\mathrm{tg}(x).\mathrm{cotg}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}.\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = 1$ □

Nyní rovnice pro posun funkcí:

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{27}$$

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{28}$$

Důkaz. (27)
Varianta A - Vyplývá přímo z grafu obou funkcí.
Varianta B - Podle součtového vzorce platí:
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) = 0 - \sin(-x) = \sin(x)$ □

Důkaz. (28)
Varianta A - Vyplývá přímo z grafu obou funkcí.
Varianta B - Podle součtového vzorce platí:
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) = \cos(-x) + 0 = \cos(x)$ □

Nyní rovnice pro dvojnásobek úhlu, tedy:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \tag{29}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \tag{30}$$

Důkaz. (29)
Platí že:
$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ □

Důkaz. (30)
Platí, že:
$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\alpha)\sin(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ □

Nyní rovnice pro součet a rozdíl sinů a cosinů:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{31}$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{32}$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{33}$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{34}$$

Důkaz. (31)
Nechť $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, z čehož vyplývá $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, proto:
$\sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) = 2\sin(x)\cos(y)$
Proto:
$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ □

Důkaz. (32)
Obdobně jako v důkazu (31) □

Důkaz. (33)
Obdobně jako v důkazu (31) □

Důkaz. (34)
Obdobně jako v důkazu (31) □

$$\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} \tag{35}$$

$$\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \tag{36}$$

Důkaz. (35)
$\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$
Z toho plyne:
$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2} \;\Rightarrow\; \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$ □

Důkaz. (36)
Obdobně jako v předchozím případě. □