Výroková logika

Negace kvantifikátorů

Stejně jako se dají negovat jednoduché výroky, můžeme negovat i kvantifikované výroky. Negování kvantifikátorů může být ve výsledku trochu odlišné, než bychom ve skutečnosti intuitivně čekali. Proto je důležité porozumět problematice a hlavně logické struktuře jazyka matematiky.

Začneme obecným kvantifikátorem. Jak víme, obecný kvantifikátor kvantifikuje výraz pomocí „*Pro všechna…, Pro všechny…, Pro každé…*“. Struktura takového výroku je tedy „*Pro všechna x platí nějaký výrok $p(x)$*“. Pokud bychom chtěli v tomto případě znegovat obecný kvantifikátor, potřebujeme jedno x, pro které nebude platit daný výrok. **Negací obecného kvantifikátoru** je tedy existenční kvantifikátor a negace tvrzení $p(x)$, tedy $\neg p(x)$:

$$\neg(\forall x)p \Leftrightarrow (\exists x)\neg p$$

Intuitivně by člověk řekl, že opakem „*Pro všechna…*“ bude „*Pro žádné…*“, ale tak to není.

Případ negace existenčního kvantifikátoru je opačný než v předchozím případě. Existenční kvantifikátor kvantifikuje výraz pomocí „*Existuje alespoň jedno…, Pro alespoň jedno…*“. Struktura takového výroku je obdobně „*Existuje alespoň jedno x takové, že platí nějaký výrok $p(x)$*“. Pokud bychom chtěli v tomto případě znegovat existenční kvantifikátor tak potřebujeme, aby pro všechna x neplatil daný výrok. **Negací existenčního kvantifikátoru** je tedy obecný kvantifikátor a negace tvrzení $p(x)$, tedy $\neg p(x)$.

$$\neg(\exists x)p \Leftrightarrow (\forall x)\neg p$$

Příklady

Znegujte následující výroky:

(a) $\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 + 2x \geq 3$

(b) $\exists x \in \mathbb{N} : \sqrt{x^2} = |x|$

Řešení:
(a) jak vidíme, výrok je pouze s jedním obecným kvantifikátorem. Proto místo obecného kvantifikátoru zapíšeme existenční a poté jenom znegujeme daný výraz. Pokud nám říká „*větší nebo rovno*“, tak negací bude „*menší než*“ a tím je negace hotova:
$\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 + 2x < 3$

(b) zde jsme obdrželi jeden existenční kvantifikátor, který změníme na obecný a znegujeme daný výraz, tedy z „*rovná se*“ utvoříme „*nerovná se*“:
$\forall x \in \mathbb{N} : \sqrt{x^2} \neq |x|$

Samozřejmě v každý případech nemáme takto jednoduché výroky a musíme negovat výroku s mírně složitější. To ale není problém, stále totiž stačí vyměnit kvantifikátory a znegovat daný výraz a negace je hotova.

Příklady

Znegujte následující výroky:

(a) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})(\exists z \in \mathbb{R}) : ((x \neq y) \Rightarrow (x + z = y))$

Řešení:

(a) ve výroku máme dva obecné a jeden existenční kvantifikátor, které jednoduše otočíme. Výraz je ve tvaru implikace. My však víme, že ekvivalentní formulí k negaci implikace je $p \wedge \neg q$. Ve výrazu tedy ponecháme levou stranu stejnou a pravou znegujeme a výrok je hotov:
$(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{R}) : ((x \neq y) \wedge (x + z \neq y))$